Skupovi brojeva

Skupovi brojeva

- **Skup prirodnih brojeva N,**

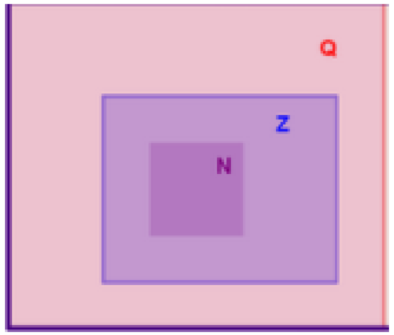
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\}.$$

- skup celih brojeva **Z,**

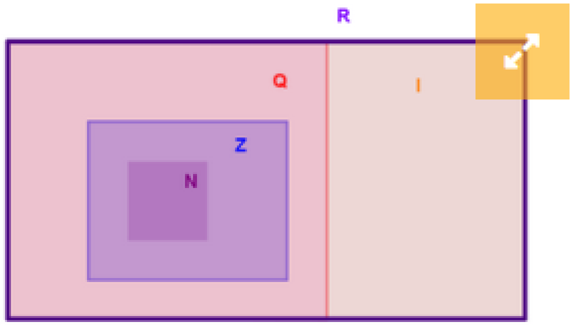
$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

- skup racionalnih brojeva **Q ,**

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}.$$



Skupovi brojeva



- skup iracionalnih brojeva I:

$\mathbb{I}$

$$\sqrt{2} = 1,41421356237309504880168872420 9\ldots,$$

$$e = 2,71828182845904523536028747135 2\ldots,$$

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327 9\ldots$$

- svi iracionalni brojevi imaju ∞ decimalne zapise koji nisu periodični.
- skup realnih brojeva **R.**

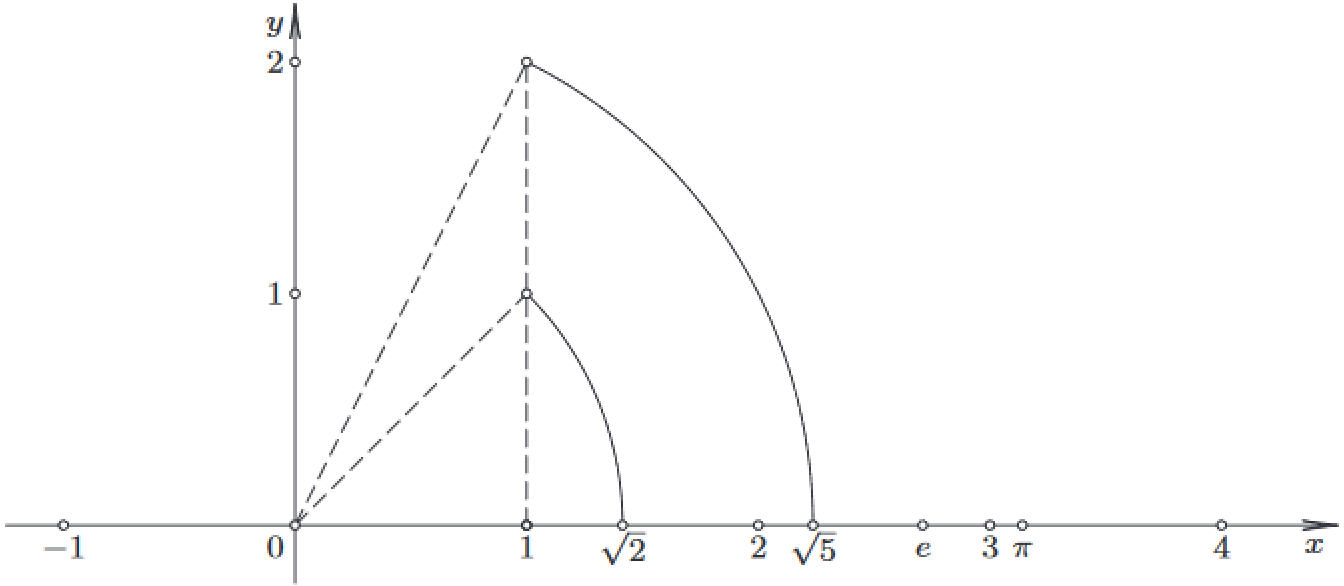
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

- I neki racionalni brojevi imaju ∞ decimalne zapise, ali su oni periodični

$$\frac{1}{7} = 0,142857142857142857142857142857 1\ldots$$
$$= 0,(142857)$$

Skupovi brojeva

- svakom realnom broju odgovara 1 tačka sa realne prave i obrnuto:



Skup kompleksnih brojeva

U skupu realnih brojeva jednačina $x^2 + 1 = 0$ nema rešenja.

Zato je uveden novi broj, koji je rešenje te jednačine.

Uvodimo pojam imaginarne jedinice i

Imaginarna jedinica i ima svojstvo da je $i^2 = -1$.

$$i^1 = i,\; i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$$

$$i^n = \begin{cases} 1, & n = 4k \\ i, & n = 4k+1 \\ -1, & n = 4k+2 \\ -i, & n = 4k+3. \end{cases}$$

Skup kompleksnih brojeva C:

$$\mathbb{C} = \{a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

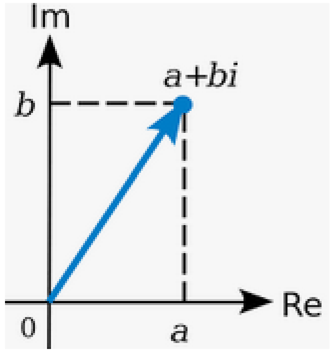
Algebarski oblik kompleksnog broja (Gausov oblik)

- Kompleksni brojevi su brojevi oblika $z = a + bi$
  pri čemu su *a, b* ϵ *R.*
- Broj *a* je realan deo kompleksnog broja z,
- Broj *b* je imaginaran deo kompleksnog broja z, (ne *b·i*)
- *i* je imaginarna jedinica $i=\sqrt{-1}$
- Oznake su $\mathcal{R}e\ z = a$ и $\mathcal{I}m\ z = b$.

Algebarski oblik kompleksnog broja

- Svakom kompleksnom broju $z = a + bi$

odgovara jedna tačka u kompleksnoj ravni sa koordinatama (a, b) i obratno



(x–osa je realna osa, a y–osa je imaginarna).

Algebarski oblik kompleksnog broja

- Za kompleksan broj $z = a + bi$
- uvodimo konjugovano kompleksan broj $\overline{z} = a - bi$
- Re(z) $=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$ Im(z)$=\frac{1}{2i}(z- \bar{z})$
- Moduo kompleksnog broja definiše se kao:

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

- Geometrijska interpretacija: moduo |z| je udaljenost tačke z od koordinatnog početka

Operacije sa kompleksnim brojevima u algebarskom obliku

- Dva kompleksna broja $z_1 = a_1 + b_1 i$ i $z_2 = a_2 + b_2 i$ su jednaka ukoliko su im jednaki realni delovi i imaginarni delovi, tj. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$ i $b_1 = b_2$.
- **Sabiranje**

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

- **Oduzimanje**

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i,$$

Primer:

(a) $(3 - 4i) + (-2 + 6i) = [3 + (-2)] + (-4 + 6)i$

$= 1 + 2i$

(b) $(-4 + 3i) - (6 - 7i) \quad = (-4 - 6) + [3 - (-7)]i$

$= -10 + 10i$

Operacije sa kompleksnim brojevima u algebarskom obliku

- Množenje

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i,$$

- Deljenje

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2) i}{{a_2}^2 + {b_2}^2}$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{{a_2}^2 + {b_2}^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{{a_2}^2 + {b_2}^2} i.$$

Primer:

(a) $(2 - 3i)(3 + 4i) = 2(3) + 2(4i) - 3i(3) - 3i(4i)$

$= 6 + 8i - 9i - 12i^2$

$= 6 - i - 12(-1)$

$= 18 - i$

(b) $(4 + 3i)^2 = 4^2 + 2(4)(3i) + (3i)^2$

$= 16 + 24i + 9i^2$

$= 16 + 24i + 9(-1)$

$= 7 + 24i$

Primer

$$\frac{3+2i}{5-i} = \frac{3+2i}{5-i}\cdot\frac{5+i}{5+i}$$

$$= \frac{15+3i+10i+2i^2}{25-i^2}$$

$$= \frac{13+13i}{26}$$

$$= \frac{13(1+1i)}{26}$$

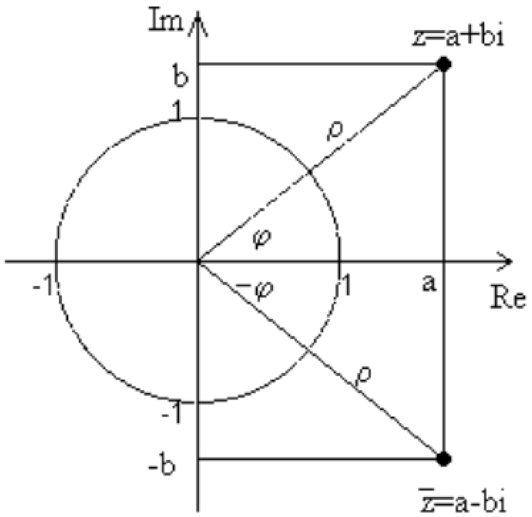
$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja (Košijev oblik)

- Trigonometrijski oblik kompleksnog broja je

$$z = \rho \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

ρ je moduo, a φ argument z



$$\arg z = \begin{cases} \mathrm{arctg}(b/a), & a > 0,\ b \geq 0; \\ \pi/2, & a = 0,\ b > 0; \\ \pi + \mathrm{arctg}(b/a), & a < 0; \\ 3\pi/2, & a = 0,\ b < 0; \\ 2\pi + \mathrm{arctg}(b/a), & a > 0,\ b < 0. \end{cases}$$

Operacije sa kompleksnim brojevima u trigonometrijskom obliku

- **Neka je** $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ **i** $z_2 = \rho_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)$

  Proizvod

$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= \rho_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1) \cdot \rho_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2) \\
z_1 \cdot z_2 &= \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1) \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2) \\
z_1 \cdot z_2 &= \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot (\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + i \cdot \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + i^2 \cdot \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) \\
z_1 \cdot z_2 &= \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot (\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + i \cdot (\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2))
\end{aligned}
$$

$$
z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))
$$

- Proizvod dva kompleksna broja je broj čiji je moduo jednak proizvodu modula, a argument jednak zbiru argumenata činilaca.

Operacije sa kompleksnim brojevima u trigonometrijskom obliku

- **Količnik**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

- Količnik dva kompleksna broja je broj čiji je moduo jednak količniku modula deljenika i delioca, a argument jednak razlici argumenata deljenika i delioca.

Operacije sa kompleksnim brojevima u trigonometrijskom obliku

- **Stepenovanje** (De Moivreova formula)
- De Moivreova formula odnosi se na stepenovanje kompleksnog broja. Kompleksan broj je najlakše stepenovati kada je predstavljen u trigonometrijskom obliku
- $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$z^n = \rho^n \left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right)$$

$$[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

Operacije sa kompleksnim brojevima u trigonometrijskom obliku

- Korenovanje
- n-ti koreni iz kompleksnog broja z

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Eksponencijalni oblik kompleksnog broja (Ojlerov oblik)

- Ojlerova formula:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

- eksponencijalni oblik kompleksnog broja:

$$z = \rho \cdot e^{i\varphi}.$$